Polinomio

Expresión algebraica que constituye la suma o la resta ordenadas de un número finito de términos o monomios.

En la función polinómica P(x) = $-3x^4+5x^3-6x^2+9x+4$; la expresión algebraica $-3x^4+5x^3-6x^2+9x+4$ recibe el nombre de polinomio.

Todo polinomio está formado por la adición y sustracción de sumandos.

Elementos de un polinomio:

Términos: es cada sumando que conforma al polinomio.

En el polinomio anterior, los términos son: $2x^4$; $5x^3$;$-6x^2$; 9x; 4

Coeficientes: es el valor numérico que multiplica a la parte literal.

En el polinomio anterior, los coeficientes son: 2; 5; -6; 9; 4

Parte Literal: es la variable con el exponente.

En el polinomio anterior la parte literal son x^4; x^3; x^2; x; x^0

Término independiente: es el coeficiente que multiplica a x^0.

En el polinomio anterior; el coeficiente es 4.

Grado: son los exponentes de las variables, es decir: 4, 3. 2, 1, 0.

Grado de un polinomio: es el mayor exponente de la variable.

El polinomio anterior es de 4^{to} grado.

Ejemplos

P(x) = 2, polinomio de grado cero (el polinomio solo consta del término independiente).

P(x) = 3x + 2, polinomio de grado uno.

P(x) = $3x^2$ + 2x, polinomio de grado dos.

P(x) = $2x^3$+ 3x + 2, polinomio de grado tres.

P(x) = $4x^4$+ 4x + 2, polinomio de grado cuatro.

P(x) = $2x^5$+ 3x + 1, polinomio de grado cinco.

Clasificación de los polinomios

Los polinomios tienen varias clasificaciones entre ellas tenemos:

1. Según su número de términos.
2. Según su grado.
3. Otros polinomios especiales.

Tipos de polinomios según sus términos

1. Monomios.
2. Binomios.
3. Trinomios.

Así sucesivamente se les va dando el nombre, según la cantidad de términos que tenga el polinomio.

1. Monomio

Es aquel polinomio que está formado por un solo término.

Ejemplos de monomio

a) P(x) = $-2x^3$ b) G(x) = $\frac{3}{2}x^5$ c) H(x) = $-x^4$

2) Binomio

Es aquel polinomio formado por dos términos.

Ejemplos de binomio

a) P(x) = $10x^5 - x^4$ b) G(x) = $x^3 + 1$c) c) R(x) = $\frac{7}{6}x^2 + 6$

3) Trinomio

Es aquel polinomio que tiene tres términos.

Ejemplos de trinomio

a) P(x) = $x^5 - x^4 - 15x^2$ b) R(x) = $x^9 - 52x^3 + \frac{4}{3}x$ c) Q(x) = $x^2 - 2x + 1$

Tipos de polinomios según el grado

1. Polinomio nulo.
2. Primer grado.
3. Segundo grado.
4. Tercer grado.

Así sucesivamente se les va dando el grado, según el mayor exponente que tengas en el polinomio.

1) **Polinomio nulo**

Es aquel polinomio donde los coeficientes son todos iguales a cero (0).

Ejemplos de Polinomio nulo

a) P(x) = 0 b) R(x) = $0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$

Polinomio de primer grado

Es aquel polinomio donde la variable está elevada al exponente uno (1). Se escribe de la forma P(x) = ax + b ; donde (a y b) son constantes y a ≠ 0.

Ejemplos de Polinomio de primer grado

a) P(x) = -2x+3 b) G(x) = x - $\frac{1}{2}$ c) R(x) = x – 4

Polinomio de segundo grado

Es aquel polinomio donde el exponente de mayor valor es dos (2).

Ejemplos de Polinomio de segundo grado

a) P(x) = $4x^2 + 5x - 3$ b) Q(x) = $\frac{4}{3} + 12x^2$ c) M(x) = $x^2 + 6$

Polinomio de tercer grado

Es aquel polinomio donde el exponente de mayor valor es tres (3).

Ejemplos de Polinomio de tercer grado

a) P(x) = $6x^3 + 4x^2 - 3x + 7$ b) Q(x) = $-4x + 3x^3 - 5x^2$

c) M(x) = $-5x^3 + 45$ d) R(x) = $x^3 + 5x - 8$

Polinomios especiales

1. Polinomio identidad.
2. Polinomio constante.
3. Polinomios completos.
4. Polinomios incompletos.

Qué es un polinomio identidad

La función polinómica asociada al polinomio identidad es P(x) = x.

Como se puede observar para cada valor de (x) asume el mismo valor de (x).

Ejemplos de Polinomio identidad

a) P(1) = 1

b) G(3) = 3

c) R($\frac{1}{2}$) = $\frac{1}{2}$

Polinomio constante

Es aquel polinomio que está formado por un solo término constante.

Ejemplos de Polinomio constante

a) P(x) = 10

b) G(x) = -2

Polinomio completo

Un polinomio es completo si todos sus coeficientes son distintos de cero (0).

Ejemplos de Polinomio completos

a) P(x) = $4x^2 + 3x - 6$; es completo porque su mayor exponente es dos (2) y esta seguido del exponente uno (1) y luego del exponente cero (0); es decir no falta ningún término.

b) G(x) = $5x^6 - 3x^5 - 8x^4 + 2x^3 - x^2 + 5x - 6$

c) M(x) = $4x^2 + 6x^3 - 5x + 7$

d) H(x) = $2x^2 - 3x + 7$

Polinomios incompletos

Un polinomio es incompleto cuando alguno de sus coeficientes, es igual a cero(0).

Ejemplos de Polinomio incompletos

a) P(x) = $3x^2 + 6$ es incompleto porque falta el coeficiente en el termino con exponente uno (1).

b) G(x) = $-3x^4 + 6x - 8x^2 + 6$ es incompleto porque falta el coeficiente en el termino con exponente tres (3).

c) R(x) = $9x^7 - 3x^5 + 2x^4 - 8 + 4x^2$ falta el coeficiente en el termino con exponente (6, 3, 1).

d) S(x) = $8x^3 + 4x^2 - 9x$ falta el termino independiente.

Orden de un polinomio

Los polinomios se pueden ordenar de dos formas:

1. De forma creciente.
2. De forma decreciente.

Cómo se ordena un polinomio de forma creciente

Para ordenar un polinomio de forma creciente, se deben colocar los términos, según su grado, es decir de menor a mayor.

Ejemplos de orden de polinomios de forma creciente

Ordenar los siguientes polinomios de forma creciente:

a) R(x) = $9x^5 + 5x^{10} + 3 + 5x^3 + 2x^4$

Solución: R(x) = $3 + 5x^3 + 2x^4 + 9x^5 + 6x^{10}$

b) P(x) = $\frac{2}{3}x^4 + \frac{5}{7}x^5 - 3x^2 + \frac{3}{5} - 3x^3 - 4x$

Solución: P(x) = $\frac{3}{5} - 4x - 3x^2 - 3x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{5}{7}x^5$

Cómo se ordena un polinomio de forma decreciente

Para ordenar un polinomio de forma decreciente, se deben colocar los términos, según su grado, es decir de mayor a menor.

Ejemplos de orden de polinomios de forma decreciente

Ordenar los siguientes polinomios de forma decreciente:

a) P(x) = $9x^5 + 6x^{10} + 3 + 5x^3 + 2x^4$

Solución: P(x) = $6x^{10} + 9x^5 + 2x^4 + 5x^3 + 3$

b) R(x) = $4x^4 + 5x^5 - 3x^2 + 7 - 3x^3 - 4x$

Solución: R(x) = $5x^5 + 4x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 4x + 7$

Términos semejantes.

Son aquellos términos que tienen la misma variable con el mismo exponente.

Para agrupar o reducir términos semejantes, sumamos algebraicamente los coeficientes y **mantenemos la misma parte literal**, es decir, la misma variable con su exponente

Por ejemplo:

a) $5x^2$ Es término semejante con $-7x^2$ porque ambos tienen la misma parte literal (x^2), si los agrupamos nos queda: $5x^2 - 7x^2 = -2x^2$

b) $-9a^5b^4$ es término semejante con $-12a^5b^4$ porque ambos tienen el misma parte literal (a^5b^4), si los agrupamos nos queda: $-9a^5b^4 - 12a^5b^4 = -21a^5b^4$

c) $\frac{5}{4}x^3$ no es término semejante con $4x^2$ porque no tienen la misma parte literal($x^3 \neq x^2$) , por consiguiente, no se pueden agrupar o reducir los términos.

d) Reduzca los siguientes términos del polinomio y ordénelos en forma decreciente si falta algún término, completarlo:

$$2x^3 - 3x^2 + 2x - 5x^2 + 7x^2 - x^3 - x - 8x^4 + 19x^4 + 5x^3$$

Solución:

Colocamos los términos ordenados de mayor a menor grado, nos queda así: $-8x^4 + 19x^4 + 2x^3 - x^3 + 5x^3 - 3x^2 - 5x^2 + 7x^2 + 2x - x$.

Reducimos los términos semejantes, es decir,

$(-8 + 19)\, x^4 = 11x^4$

$(2 - 1 + 5)\, x^3 = 6x^3$

$(-3 - 5 + 7)\, x^2 = -x^2$

$(2 - 1)x = x$, por lo tanto:

$-8x^4 + 19x^4 + 2x^3 - x^3 + 5x^3 - 3x^2 - 5x^2 + 7x^2 + 2x - x = 11x^4 + 6x^3 - x^2 + x$

Nota: si el coeficiente de un término es uno(1), simplemente se coloca la parte literal sin el uno(1), es decir, $1x^2 = x^2$; $-1a^2b = -a^2b$

Operaciones con polinomios.

Adición de polinomios.

Procedimientos:

1) Se ordena cada polinomio y se completa con ceros los términos faltantes (si es necesario).

2) Se colocan los polinomios uno debajo del otro, de tal forma que los términos semejantes queden en la misma columna.

3) Se agrupan los términos semejantes.

Ejemplo:

Dados los siguientes polinomios:

$P(x) = -3x^5 + 12x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 5x + 1$, $Q(x) = 4x^4 + 5x^5 - x^2 + 1 - 3x^3 - 4x$

$R(x) = 9x^5 + 6x^2 + 3 + 5x^3$

Determine:

1) $P(x) + R(x) \longrightarrow$

$$\begin{array}{rl} P(x) = & -3x^5 + 12x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 5x + 1 \\ R(x) = & \underline{\ 9x^5 + 0x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 0x + 3\ } \\ P(x) + R(x) = & 6x^5 + 12x^4 + 10x^3 + 8x^2 - 5x + 4 \end{array}$$

2) P(x) + Q(x) +R(x)

$$\begin{array}{rl} P(x) = & -3x^5 + 12x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 5x + 1 \\ Q(x) = & 5x^5 + 4x^4 - 3x^3 - x^2 - 4x + 1 \\ R(x) = & \underline{9x^5 + 0x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 0x + 3} \\ & 11x^5 + 16x^4 + 7x^3 + 7x^2 - 9x + 5 \end{array}$$

Resta de polinomios:

Dados dos polinomios P(x) y Q(x) para efectuar la resta o sustracción de polinomios P(x) – Q(x), se calcula la suma del polinomio minuendo con el opuesto del polinomio sustraendo, es decir P(x)+[−Q(x)], donde P(x) es el minuendo y Q(x) es el sustraendo.

En resumen: una sustracción de polinomios se resuelve aplicando los mismos procedimientos que aplicamos en la suma pero, al polinomio sustraendo le cambiamos el signo a cada término.

Ejemplo:

Dados los siguientes polinomios:

P(x) $=-3x^5 + 12x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 5x + 1$,Q(x) = $4x^4 + 5x^5 - x^2 + 1 - 3x^3 - 4x$

R(x) $=9x^5 + 6x^2 + 3 + 5x^3$

Determine:

1) P(x) – Q(x)=

$$\begin{array}{rl} P(x) = & -3x^5 + 12x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 5x + 1 \\ -\ Q(x) = & \underline{-5x^5 - 4x^4 + 3x^3 + x^2 + 4x - 1} \\ P(x) - P(x) = & -8x^5 + 8x^4 + 8x^3 + 3x^2 - x + 0 \end{array}$$

2) R(x) – P(x) =

$$\begin{array}{rl} R(x) = & 9x^5 + 0x^4 + 5x^3 + 6x^2 + 0x + 3 \\ -\ P(x) = & \underline{3x^5 - 12x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 5x - 1} \\ R(x) - P(x) = & 12x^5 - 12\,x^4 + 0x^3 + 4x^2 + 5x + 2 \end{array}$$

3) P(x) – Q(x) – R(x)

$$P(x) = -3x^5 + 12x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 5x + 1$$

$$-\ Q(x) = -5x^5 - 4x^4 + 3x^3 + x^2 + 4x - 1$$

$$-\ R(x) = \underline{-9x^5 + 0x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 0x - 3}$$

$$P(x) - Q(x) - R(x) = -17x^5 + 8x^4 + 3x^3 - 3x^2 - x - 3$$

Multiplicación de polinomios.

Caso I. **Multiplicación de un número por un polinomio**
Para multiplicar un número por otro escrito en forma polinómica se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición.

Ejemplos:

a) $3\cdot(2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = 6x^3 - 9x^2 + 12x - 6$

b) $-2.(5x^3 + 7x^2 + 2x - 4) = -10x^3 - 14x^2 - 4x + 8$

El símbolo (**.**) el cual denota la multiplicación y se encuentra delante del paréntesis, puede ser omitido.

Caso II. Multiplicación de un monomio por un polinomio

En la multiplicación de un monomio por un polinomio se multiplica el monomio por todos y cada uno de los términos que forman el polinomio.

La multiplicación del monomio por un término es otro término que tiene por coeficiente el producto de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene aplicando la multiplicación de potencias de igual base, es decir, se copia la misma base y se suman los exponentes.

Ejemplos:

a) $3x^2.(2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = 6x^5 - 9x^4 + 12x^3 - 6x^2$

También se puede multiplicar un monomio por un polinomio escribiendo en monomio debajo del polinomio.

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 4x - 2 \\ 3x^2 \\ \hline 6x^5 - 9x^4 + 12x^3 - 6x^2 \end{array}$$

b) $5xy^3.(-2y^3 - 6xy^2 + 7x^2y - x^3) = -10xy^6 - 30x^2y^5 + 35x^3y^4 - 5x^4y^3$

$$\begin{array}{r} -2y^3 - 6xy^2 + 7x^2y - x^3 \\ 5xy^3 \\ \hline = -10xy^6 - 30x^2y^5 + 35x^3y^4 - 5x^4y^3 \end{array}$$

Caso III. Multiplicación de polinomios

Este tipo de operaciones se puede llevar a cabo de dos formas distintas.

Vamos a trabajar con el siguiente ejemplo:

P(x)= $2x^3 - 3x^2 + 4x$ y Q(x)= $2x^2 - 3$

Resolver: P(x).Q(x)

Primera forma: Se multiplica cada término del polinomio Q(x) por todos los elementos de P(x) y luego se agrupa los términos semejantes.

P(x).Q(x) = $(2x^3 - 3x^2 + 4x).(2x^2 - 3) = 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 6x^3 + 9x^2 - 12x$

. $= 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x$

Segunda forma: Se escribe los polinomios uno debajo del otro y se efectúa el producto de monomios de derecha a izquierda o viceversa. Luego se agrupa los términos semejantes.

Nota: Si los polinomios están desordenados e incompletos, es recomendable ordenarlos y completarlos.

P(x).Q(x) =

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 4x \\ 2x^2 + 0x - 3 \\ \hline -6x^3 + 9x^2 - 12x \\ 0x^4 - 0x^3 + 0x^2 \\ 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 \\ \hline 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x \end{array}$$

Ejemplo 2. Dado los polinomios: A(x) = $-2x^4 + 5 + 7x^5 - 12x$ B(x)= $3x^2 - 4$

Determine: A(x). B(x) =

$$\begin{array}{r} 7x^5 - 2x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 12x + 5 \\ 3x^2 + 0x - 4 \\ \hline -28x^5 + 8x^4 - 0x^3 - 0x^2 + 48x - 20 \\ 0x^6 - 0x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 0x^2 + 0x \\ 21x^7 - 6x^6 + 0x^5 + 0x^4 - 36x^3 + 15x^2 \\ \hline 21x^7 - 6x^6 - 28x^5 + 8x^4 - 36x^3 + 15x^2 + 48x - 20 \end{array}$$

División de polinomios.

Caso I. división de monomios.

Para dividir un monomio ax^m entre otro bx^n, se dividen primero los coeficientes entre sí y luego las potencias. Si m es mayor o igual que n (m≥n) entonces

$ax^m \div bx^n = (a \div b).x^{m-n}$.

Ejemplo 1: Resolver: $50x^5 \div 5x^3 = (50 \div 5)x^{5-3} = 10x^2$

Ejemplo 2: Resolver: $56x^3y^4 \div 28xy^4 = 2x^2$

Caso II. división de un polinomio entre un monomios.

Procedimientos:

1) Se ordena el polinomio dividendo en forma decreciente.
2) Se divide el primer término del dividendo entre el monomio. El resultado se escribe en el cociente.
3) El cociente se multiplica por el monomio divisor y el opuesto del resultado se agrupa con el primer término del dividendo obteniendo como resultado cero(0).
4) Se repite el proceso hasta que se termine los términos del divisor.

Ejemplo 1. Resolver la división $(12x^4 - 56x^3 + 14x^2) \div 2x$

$$
\begin{array}{rrr|l}
12x^4 & -56x^3 & +14x^2 & 2x \\
\cline{4-4}
-12x^4 & & & 6x^3 - 28x^2 + 7x \longrightarrow \text{Cociente} \\
\cline{1-1}
0x^4 & -56x^3 & & \\
 & 56x^3 & & \\
\cline{2-2}
 & 0x^3 & +14x^2 & \\
 & & -14x^2 & \\
\cline{3-3}
 & & 0 & \quad R(x) = 0
\end{array}
$$

Como el residuo o resto es cero, la división es exacta.

Caso III. División de polinomios.